Estatística I

Licenciatura em Economia
2.º Ano/2.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.^{os} 12 e 13 (Semana 7)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Aula 9	Coeficiente de assimetria e coeficiente de kurtosis. Exemplo. Quantil de ordem alfa para distribuições contínuas. Mediana como medida de localização, amplitude inter-quartis como medida de dispersão. Exemplo.
Aula 10	**Início do capítulo 3:** Variáveis aleatórias bidimensionais. Função de distribuição conjunta, propriedades. Funções de distribuição marginais. Independência de variáveis aleatórias. Variáveis aleatórias bidimensionais discretas. Função probabilidade conjunta. Propriedades. Função probabilidade marginal. Exemplo.
Aula 11	Variáveis bidimensionais discretas: independência. Variáveis bidimensionais contínuas: função densidade conjunta e funções densidade marginais. Independência. Função probabilidade condicionada. Propriedades. Exemplo.
Aula 12	Função densidade. Função densidade de probabilidade condicionada. Propriedades. Exemplo.

Pares Aleatórios Contínuos: Exercícios

1

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;
Independência; Covariância e Correlação

5.13 Considere a variável aleatória bidimensional contínua (X, Y) com função densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & , 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y.

(b) Calcule a $V(X|Y = y)$.

(c) Verifique que $E(X) = E[E(X|Y)]$.

Exercício 5.13 (a): Coeficiente de Correlação entre X e Y

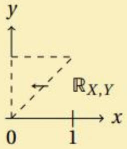
- **Par aleatório**

  (X, Y)

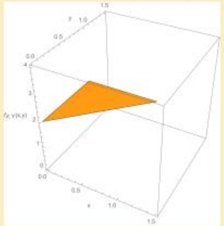
- **F.d.p. conjunta**

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- **Contradomínio de (X,Y), $\mathbb{R}_{X,Y}$**



- **Gráfico da f.d.p. conjunta de (X,Y)**



- **Correlação entre X e Y**

  Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned} corr(X,Y) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}} \\ &= \frac{E(XY) - E(X)\times E(Y)}{\sqrt{[E(X^2)-E^2(X)]\times[E(Y^2)-E^2(Y)]}} \end{aligned}$$

  é necessário calcular diversos momentos...

- **Valor esperado, 2o. momento e variância de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\right] dx \\ &= \int_0^1 x \times \left[\int_x^1 2\,dy\right] dx \\ &= \int_0^1 x \times \left[(2y)\Big|_x^1\right] dx \\ &= \int_0^1 x \times 2(1-x)\,dx \qquad [f_X(x) = 2(1-x), \quad 0 < x < 1] \\ &= \left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercício 5.13 (a): Coeficiente de Correlação entre X e Y

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_X(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 \times 2(1-x)\,dx \\
&= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{6} \\
V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

- **Valor esperado, 2o. momento e variância de Y**

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times f_Y(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\right] dy \\
&= \int_0^1 y \times \left[\int_0^y 2\,dx\right] dy \\
&= \int_0^1 y \times \left[(2x)|_0^y\right] dy \\
&= \int_0^1 y \times 2y\,dy \qquad [f_Y(y) = 2y, \quad 0 < y < 1] \\
&= \left(\frac{2y^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \times f_Y(y)\,dy \\
&= \int_0^1 y^2 \times 2y\,dy \\
&= \left(\frac{2x^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

Exercício 5.13 (a): Coeficiente de Correlação entre X e Y

- **Valor esperado de** XY

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y \times f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1\int_x^1 x\,y \times 2\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 x\left(\int_x^1 2y\,dy\right)dx \\
&= \int_0^1 x\left(y^2\Big|_x^1\right)dx \\
&= \int_0^1 x(1-x^2)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \left.\left(\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{4}\right)\right|_x^1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- **Covariância entre** X **e** Y

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)\times E(Y) \\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

- **Correlação pedida**

$$\begin{aligned}
corr(X,Y) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}} \\
&= \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

- **[Obs.**
  - $corr(X,Y) = 0.5 \neq 0$ logo X e Y são v.a. DEPENDENTES.
  - $corr(X,Y) = 0.5 > 0$ donde X e Y tenderão a variar no mesmo sentido.
  - O valor de $|corr(X,Y)| = 0.5$ está relativamente afastado de 1 donde se possa adiantar que as v.a. X e Y não estão correlacionadas linearmente.]

Exercício 5.13 (b): Variância Condicional

- **F.d.p. de X condicional a $Y = y$**

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde y é uma constante no intervalo $(0,1)$.

- **Variância de X condicional a $Y = y$**

$$\begin{aligned} V(X \mid Y=y) &= E(X^2 \mid Y=y) - E^2(X \mid Y=y) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_{X|Y=y}(x)\,dx\right] - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_{X|Y=y}(x)\,dx\right]^2 \\ &= \left[\int_0^y x^2 \times \frac{1}{y}\,dx\right] - \left[\int_0^y x \times \frac{1}{y}\,dx\right]^2 \\ &= \frac{1}{y} \times \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^y - \left[\frac{1}{y} \times \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^y\right]^2 \\ &= \frac{y^2}{3} - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \\ &= \frac{y^2}{12}, \quad 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Exercício 5.13 (c): E(X) = E(E(X|Y))

Verifique que $E(X) = E[E(X|Y)]$.

- **V.a. de interesse**

  $E(X \mid Y)$ é uma v.a. que toma valores

  $$E(X \mid Y = y) \stackrel{(b)}{=} \frac{y}{2}, \quad 0 < y < 1$$

  com densidade $f_Y(y)$. Assim,

$$\begin{aligned} E[E(X|Y)] &= \int_0^1 \frac{y}{2} \times f_Y(y)\,dy \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_0^1 \frac{y}{2} \times 2y\,dy \\ &= \left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \\ &\stackrel{(a)}{=} E(X). \end{aligned}$$

- **[Obs.**

  $E[E(X|Y)] = E(X)$ para qualquer par aleatório (X, Y)...]

Distribuição Uniforme Discreta

Variáveis Aleatórias Discretas

2

Variáveis Aleatórias Discretas

No contexto de v.a. discretas, há variáveis que são usadas em muitas situações e que por isso merecem ser estudadas em detalhe:

- Bernoulli
- Binomial (formulário) (Tabelas)
- Uniforme discreta
- Poisson (formulário) (Tabelas)
- Geométrica (formulário)

Distribuição Uniforme Discreta

Definição: A v. a. X segue uma **distribuição Uniforme discreta em N pontos**, $\boldsymbol{X \sim U\{1,2,\dots,N\}}$, se a sua função de probabilidade é:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{N}, \qquad x = 1, 2, \dots, N.$$

O parâmetro caracterizador desta distribuição é N.

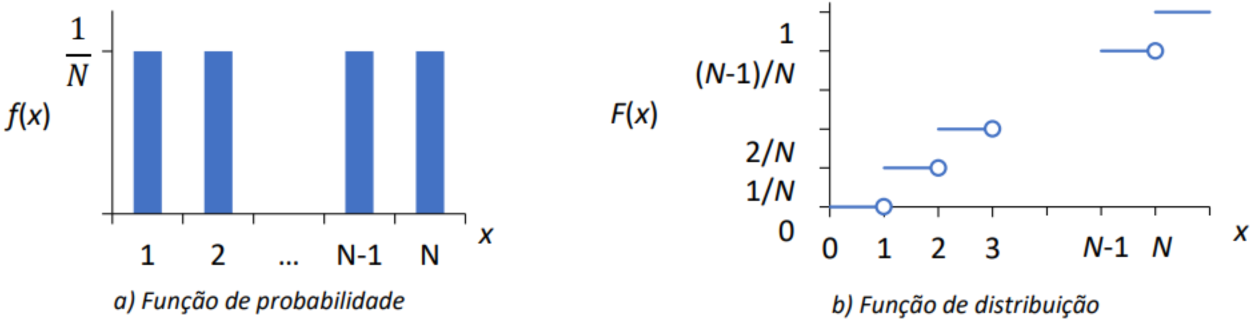


Figura 5.1: *Função de probabilidade e de distribuição da distribuição Uniforme discreta em N pontos.*

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Distribuição Uniforme Discreta

Para qualquer valor de N, esta distribuição tem uma forma muita característica sendo, por exemplo, sempre simétrica em torno da sua média

Se $X \sim U\{1, 2, \ldots, N\}$ então $\mu_X = E(X) = \dfrac{N+1}{2}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \dfrac{N^2-1}{12}$.

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Distribuição Uniforme: Exercícios

Variáveis Aleatórias Discretas

3

Considere-se a experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado.

Seja X a v. a. que representa o valor da face voltada para cima.

a) Descreva a função de probabilidade da v. a. X.

b) Determine o valor esperado e a variância de X.

c) Qual a probabilidade de sair um número par no dado?

d) Determine a probabilidade de sair um número superior a 3 no lançamento.

e) Num lançamento, qual a probabilidade de sair um número inferior ou igual a 2?

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Exercício 1: Distribuição Uniforme Discreta

a) Função de probabilidade:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Portanto, $X \sim U\{1, 2, \dots, 6\}$.

b) $E(X) = \dfrac{6+1}{2} = 3{,}5.$

$Var(X) = \dfrac{6^2 - 1}{12} = 2{,}9167.$

c) $P(X = 2 \cup X = 4 \cup X = 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$

d) $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$

e) $P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Obrigada!

Questões?